

Spectres d'énergie et de puissance (Relations de Parseval)

D'une part physiquement, quand on applique une tension $x(t)$ aux bornes d'une résistance de 1 ohm, on dissipe une puissance instantanée de $x^2(t)$ dans la résistance. D'autre part mathématiquement, lors du passage de l'espace des fonctions du temps à l'espace des transformées de Fourier, il y a conservation des produits scalaires d'où des identités (relation de Parseval) entre les énergies ou entre les puissances.

- Pour une fonction périodique réelle $x_T(t)$ décomposable en série de Fourier, on a :

$$(1) \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

L'intégrale étant homogène à une énergie, le membre de gauche est une puissance moyenne. Ainsi, les $|C_n|^2$ constituent un spectre de puissance.

- Pour un signal déterministe non périodique $x(t)$ de carré intégrable (donc à énergie finie), on a :

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Cette fois $|X(f)|^2$ constitue une Densité Spectrale d'Energie (DSE).

- Pour un signal numérique x_n de carré sommable, on a :

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |X(e^{j2\pi f})|^2 df$$

Et par analogie, $|X(e^{j2\pi f})|^2$ constitue une DSE.

- Dans le cas où on utilise la Transformée de Fourier Discrète $\{X_k\}$, on a :

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

$|X_k|^2$ constitue aussi une DSE.

- Si on a affaire à un signal analogique aléatoire, stationnaire et ergodique $X(t)$, l'équation de Parseval appliquée à une réalisation $x(t)$ donne :

$$(5) \quad \lim_{T_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_{xx}(f)| df = \text{Variance de } X(t)$$

$\Phi_{xx}(f)$, qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\phi_{xx}(\tau)$ de $X(t)$, est ici une Densité Spectrale de Puissance (DSP) car le membre de gauche est une puissance moyenne.

- Enfin, si on a un signal numérique aléatoire, stationnaire et ergodique $\{X_n\}$, on a :

$$(6) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \sum_{n=-M}^{+M} x_n^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Phi_{xx}(e^{j2\pi f}) df = \text{Variance de } \{X_n\}$$

Où $\Phi_{xx}(e^{j2\pi f})$, qui est la transformée de Fourier de la séquence d'autocorrélation de $\{X_n\}$, est une DSP.

NB : Si les signaux x sont complexes (et non réels), les équations (1) à (6) s'écrivent avec $|x|$ dans les membres de gauche.