

La transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal numérique (signal à temps discret)

L'idée sous-jacente de la TFD est de créer un opérateur programmable (un algorithme) permettant le calcul de l'échantillonnage des spectres. Ainsi, le signal comme sa transformée de Fourier (discrète) seront tous 2 numériques (des suites).

1. Définition

$\{x_n\}$ = signal numérique (c'est une suite) de durée N ($x_n = 0$ pour $n \geq N$).

$$\text{➤ } X_k = \text{TFD}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{avec } k = 0, \dots, N-1$$

➤ Inversement,

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = (\text{TFD})^{-1}(\{X_k\}) \quad \text{avec } n = 0, \dots, N-1$$

On a ainsi N points à la fois pour le signal et pour son spectre (sous entendu N points entre $f = 0$, et $f = 1$)

NB : Les deux signaux ont la même périodicité N.

$$x_{n+N} = x_n$$

$$X_{k+N} = X_k$$

2. Démonstration

Rappel sur la Transformée de Fourier d'un signal numérique $\{x_n\}$:

$$(1) \quad \text{TF}(\{x_n\}) = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi f n}$$

$$(2) \quad (\text{TF})^{-1}(X(f)) = \int_0^1 X(f) e^{+j2\pi f n} df = x_n$$

• Si $\{x_n\}$ est de durée finie N ($x_n = 0$ pour $n \geq N$) :

$$\text{TF}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f n}$$

Ce calcul peut être réalisé pour $f = \frac{k}{N}$ $k = 0, \dots, N-1$ (On a pris N points sur une période de spectre $\Delta f = \frac{1}{N}$).

D'où :

$$(3) \quad \text{TFD}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = X_k, \quad k = 0, \dots, N-1$$

où la transformée de Fourier inverse (2) peut être approchée par :

$$(4) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{N}\right) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \hat{x}_n \quad n = 0, \dots, N-1$$

qui est périodique de période N ($\hat{x}_{n+N} = \hat{x}_n$)

On peut constater que $\hat{x}_n = x_n$ pour $n = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \hat{x}_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \\ \hat{x}_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} \right] \end{aligned}$$

On remarque $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k \frac{\lambda}{N}} = 0$ si $\frac{\lambda}{N}$ n'est pas entier (c'est la somme vectorielle de $\sqrt[N]{1}$).

et $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k \frac{\lambda}{N}} = 1$ si $\frac{\lambda}{N}$ est entier, c'est-à-dire quand $m - n = i N$, i entier.

$$\text{Ainsi } \hat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n+iN} = x_n + x_{n+N} + x_{n+2N} + \dots + x_{n-N} + x_{n-2N} + \dots = x_n$$

puisque x_n est de durée fixée N .