La transformée en z

1. définition

Soit une suite $\{x_n\}$. Sa transformée en z, $TZ(\{x_n\}) \overset{D}{=} X(z)$, est définie par :

(1) $$X(z) \overset{D}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \, z^{-n}$$, où z est une variable complexe.

Mathématiquement, cette série existe généralement, c'est-à-dire converge, pour $\rho_m \le |z| \le \rho_M$.

- exemple 1 :

$$\{x_n\} = \begin{cases} a^n & \text{pour tout } n \ge 0 \text{ et } |a|<1 \\ 0 & \text{pour tout } n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = 1 + a\,z^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots + a^n z^{-n} + \ldots$$
$$X(z) = 1 + \frac{a\,z^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}, \quad \text{si } \left|a\,z^{-1}\right| < 1, \text{ c'est-à-dire si } |z| > |a|.$$

- exemple 2 : $\{x_n\}$: $x_n = a^{|n|}$ $(|a| < 1)$

$$X(z) = \ldots a^2 z^2 + a\,z + 1 + a\,z^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots$$
$$X(z) = \frac{a\,z}{1 - a\,z} + 1 + \frac{a\,z^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}$$

Si $|a\,z| < 1$, c'est-à-dire si $|z| < \frac{1}{|a|}$

et si $\left|a\,z^{-1}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|z| > |a|$

Donc, $X(f)$ existe pour z : $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$ (anneau de convergence)

2. Propriétés de la transformée en z

$TZ(\{x_n\}) \overset{D}{=} X(z)$, $\quad TZ(\{y_n\}) \overset{D}{=} Y(z)$

- linéarité : $TZ(\{a\,x_n + b\,y_n\}) = a\,X(z) + b\,Y(z)$
- convolution : $TZ(\{x_n * y_n\}) = X(z) \cdot Y(z) = C(z)$

  avec $C_n = x_n * y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n\ y_{n-m} =$ produit de convolution
- avance : $TZ(\{x_{n+1}\}) = z\,X(z)$, $TZ(\{x_{n+k}\}) = z^k\,X(z)$
- retard : $TZ(\{x_{n-1}\}) = z^{-1}\,X(z)$, $TZ(\{x_{n-k}\}) = z^{-k}\,X(z)$
- somme : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n = \lim_{z \to 1} X(z)$
- produit par a^n : $TZ(\{a^n\ x_n\}) = X(a^{-1}\,z)$
- produit par n : $TZ(\{n\ x_n\}) = -z\,\frac{dX(z)}{dz}$
- déroulement inverse : $TZ(\{x_{-n}\}) = X(z^{-1})$

3. Dictionnaire de transformées en z

$\{x_n\}$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}$	Anneaux de convergence Λ
$a^{\lvert n\rvert}$ ($\lvert a\rvert < 1$)	$\dfrac{az}{1-az} + 1 + \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\left]\lvert a\rvert, \dfrac{1}{\lvert a\rvert}\right[$
$\delta(n-k)$	z^{-k}	$]0, +\infty[$
Γ_n	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$]1, \infty[$
$a^n \Gamma_n$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$]\lvert a\rvert, \infty[$
$n \Gamma_n$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$]1, \infty[$
$n^2 \Gamma_n$	$\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$]1, \infty[$
$na^n \Gamma_n$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$]\lvert a\rvert, \infty[$
$(a^n \cos nb) \Gamma_n$	$\dfrac{z^2 - az\cos b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$]\lvert a\rvert, \infty[$
$(a^n \sin nb) \Gamma_n$	$\dfrac{az \sin b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$]\lvert a\rvert, \infty[$

4. Applications à la résolution analytique d'une équation de récurrence linéaire à coefficients constants

On cherche la solution analogique de l'équation :

$x_n = 0{,}5\, x_{n-1} + 0{,}5\, u_{n-1}$, $x_0=0$
pour $u_n = \Gamma_n$

En prenant la transformée en z des 2 membres de l'équation :

$$X(z) = 0{,}5\,z^{-1}\, X(z) + 0{,}5\,z^{-1}\, U(z)$$

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{0{,}5\,z^{-1}}{1-0{,}5\,z^{-1}} \quad \text{(Transmittance ou fonction de transfert)}$$

Avec $U(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ (cf. dictionnaire), on a :

$$X(z) = \frac{0{,}5\,z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0{,}5\,z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{0{,}5\,z^{-1}}{1-0{,}5\,z^{-1}} \quad \text{(décomposition en éléments simples)}$$

Le dictionnaire donne alors :

$$x_n = [\ 1-(0{,}5)^n\ ]\ \Gamma_{n-1}$$